8-6 Andragradsekvationer. Namn:……………………………..

Inledning

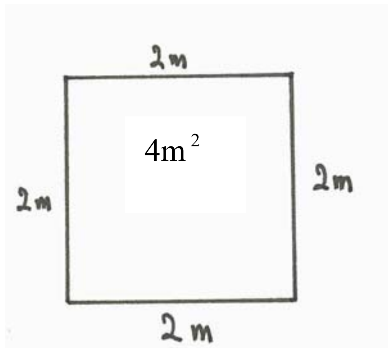
Nu har du arbetat en hel del med ekvationer där du löst ut ett siffervärde på en okänd storhet, ofta kallad x. I det här kapitlet skall du lära dig lösa ekvationer, där du har x^2 -termer, det vill säga den okända storheten i kvadrat. Även ”vanliga” x-termer kan ingå. Vi kallar ekvationstypen för **ekvationer av andra graden.** Den här typen av ekvationer uppkommer ofta i samband med geometriska problem, till exempel Pythagoras’ sats, eller vid fysikaliska till exempel där man låter en sten falla fritt, och vill beräkna hur långt stenen fallit efter en viss tid.

Ett första exempel

Vi startar med ett första exempel. Du har en kvadrat vars yta är 4 m^2 . Hur stor är kvadratens sida? Har du någon aning?

Svar:…………………………………………………………..

Du sökte ett tal (sidan) som multiplicerat med sig själv blir 4. Detta tal kallar du för $\sqrt{4}$.
$\sqrt{4} * \sqrt{4} = 4$ enligt definitionen på ett rotuttryck.



Men du kan också resonera så här:

Antag att kvadratens sida är x.
Då får jag ekvationen: x*x = 4
Eller $x^2 = 4$. Dra roten ur båda leden (samma sak i VL som HL!)
$x = \sqrt{4}$
x=2

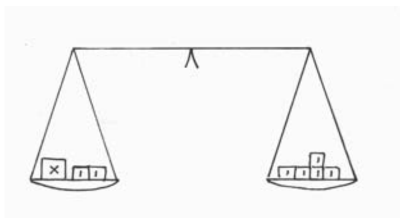
Vad menas med en andragradsekvation?

Har du något förslag på vad rubriken syftar på?

Svar:…………………………………………………………………

Just precis. Ekvationen innehåller en obekant ”i kvadrat” eller ”upphöjt till två” eller en ekvation av ”andra graden”. De ekvationer du kommit i kontakt med tidigare innehåller obekanta av ”första graden” det vill säga den innehåller enbart x-termer.

Hur löser jag en ekvation av andra graden?



Vi tar ett exempel. Här kommer en andragradsekvation:
$x^2 =9$ (du söker ett tal som multiplicerat med sig själv skall bli 9)
Lösning: Från kapitlet om ekvationer lärde du dig att likhetstecknet i en ekvation är det som allt snurrar omkring, och att man får göra vad men vill bara man gör **exakt samma sak** i vänstra ledet som i högra ledet. Har du något förslag på vad man skall göra?

Svar:………………………………………………………………………………….

Just det. Varför inte dra roten ur båda leden. Samma sak på båda sidor om likhetstecknet!

$\sqrt{x^2} = \sqrt{9}$

Eftersom $\sqrt{x^2}$ = x så får du:

x = $\sqrt{9}$

x=3

Finns det någon ytterligare lösning? Tänk till, för här är det lurigt!

Svar:………………………………………………………………..

Ja det finns det! Talet -3 uppfyller också kravet, eftersom (-3)*(-3) = +9 eller 9. Du kar kommit på någonting mycket intressant och viktigt:

En andragradsekvation har alltid två lösningar !

Denna egenskap skiljer en andragradsekvation från en förstagradsekvation, som bara har **en lösning**.

Inledande exempel på andragradsekvationer

Lös följande ekvationer. Tänk på att det finns två lösningar till varje ekvation.

8-6-01	$x^2 = 64$	Svar:…………………………………
8-6-02	$x^2 - 25 = 0$	Svar:…………………………………
8-6-03	$x^2 = 44$	Svar:…………………………………
8-6-04	$x^2 + 5 = 30$	Svar:…………………………………
8-6-05	$2x^2 = 26$	Svar:…………………………………
8-6-06	$5x^2 = 125$	Svar:…………………………………
8-6-07	$x^2 = 5 – 30$	Svar:…………………………………

Den sista var lite knepig. Den går inte att lösa, eftersom det inte finns något tal du känner till, som multiplicerat med sig själv är negativt! Så någon lösning finns inte. Talet under rotmärket måste alltid vara positivt.

Fullständiga andragradsekvationer

Hittills har vi enbart haft en x^2 term. I bland hamnar du i situationer där du förutom x^2 termen även har en x-term. Du har fått en **fullständig andragradsekvation**.

Definition:
En fullständig andragradsekvation innehåller både x^2 -termer och x-termer.
Den har givetvis också två lösningar

Hur löser jag en fullständig andragradsekvation?

Det här blir komplicerat, och om du inte vill följa tankegångarna, så hoppa till slutet. Om du är intresserad av matte: försök att hänga med!

Metoden går ut på att utnyttja det du lärt dig tidigare om kvadreringsreglerna, så vi startar med lite repetition.

Vi börjar med att repetera kvadreringsreglerna. De säger:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Vi kallar a för x i stället, och får om vi går från andra hållet:

(1)… $x^2 + 2xb + b^2 = (x+b)^2$

Här har du en godtyckligt andragradsuttryck med en x^2 -term, en x-term (med faktorn 2b framför) och en sifferterm c^2 .

Tänk på det som står ovan när du ser en helt godtycklig andragradsekvation, som kan du skriva som:

(2)…. $x^2 + bx + c = 0$

b och c är godtyckliga tal, positiva eller negativa.

Nu skall du utnyttja det vi har i (1) ovan, och omvandla så du får ett uttryck som liknar

$x^2 + 2xb + b^2$ i vänstra ledet. Hur göra?

Svar: Subtrahera c från båda leden, och lägg till termen $(\frac{b}{2})^2$ till båda leden.

Varför undrar du! Titta så får du se…..

$$x^2 + bx + (\frac{b}{2})^2 = (\frac{b}{2})^2 - c$$

VL är nu en kvadrat, så du skriver snabbt om till:

$(x + \frac{b}{2})^2 = (\frac{b}{2})^2 - c$

(Om du inte tror på detta: utveckla kvadraten i VL!)
Dra nu roten ur båda leden. Det vänstra är ju en jämn kvadrat. Det högra ledet blir lite komplicerat. Observera att du får två svar!

$(x + \frac{b}{2}) = +/- \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$

Här har du dragit roten ur båda leden. Subtrahera nu $\frac{b}{2}$ från båda leden:

(3)…..$x = -\frac{b}{2}$ $+/-$ $\sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$

Nu har du fått en formel för en generell lösning på en fullständig andragradsekvation. Du använder formeln (3) genom att skriva andragradsekvationen på ett sätt som motsvarar (2) ovan, och identifierar vad som står i stället för b och c. Därefter kan du skriva upp svaret direkt enligt (3), så lär dig formel (3)!

Identifiera vad b och c motsvarar enligt formel (2) i följande ekvationer:

8-6-08 $x^2+4x-7=0$ Svar: b=………………c=………………………..

8-6-09 $x^2-4x-7=0$ Svar; b=………………c=………………………..

8-6-10 $x^2+3x+1=0$ Svar: b=………………c=………………………..

Nu sätter du i gång att lösa andragradsekvationerna ovan enligt formel (3). Vad blir svaren?

8-6-11 $x^2+4x-7=0$ Svar:………………………………………………

8-6-12 $x^2-4x-7=0$ Svar:………………………………………………

8-6-13 $x^2-4x-7=0$ Svar:………………………………………………

Här kommer några fler exempel. Lös följande ekvationer. Tänk på att det skall vara två lösningar.

8-6-14 $x^2+4x=7$ Svar:……………………………………………….

8-6-15 $x^2-4x=0$ Svar:……………………………………………….

8-6-16 $x^2-6x-5=0$ Svar:……………………………………………….

Veckans gåta:
Vad är det för likhet mellan en apelsin och en professor?

Gå igenom dina lösningar med din lärare. Det finns fler uppgifter att träna på!

8-6 Andragradsekvationer. Träningsuppgifter

Nivå 1:

8-6-100 Hur många olika svar får du (i de allra flesta fall) när du löser en andragradsekvation?

8-6-101 I vissa fall finns inga lösningar till en ekvation av andra graden. När då?

8-6-102 Lös ekvationen: $x^2 = 9$

8-6-103 Lös ekvationen: $x^2 - 4 = 0$

8-6-104 Lös ekvationen: $x^2 - 5 = 0$

8-6-105 Lös ekvationen: $x^2 + 9 = 0$

8-6-106 Lös ekvationen: $x^2 + 7 = 7$

8-6-107 Lös ekvationen: $x^2 - 7 = 3$

8-6-108 Arean på en kvadrat är 64 m^2. Hur lång är kvadratens sida?

8-6-109 Arean på en cirkel är 90 cm^2. Hur lång är cirkelns radie? Sätt $\pi = 3$, så blir det lättare att räkna.

8-6-110 I en rätvinklig triangel är två kateter 4 cm och 7 cm. Hur lång är hypotenusan?

8-6-111 Sidan på en kvadrat är 8 dm. Hur lång är diagonalen?

8-6-112 Arean på en rektangel är 12 dm^2. En sida är 4 dm. Hur lång är den andra?

8-6-113 Två kvadrater har areorna 36 cm^2 respektive 40 cm^2. Hur mycket längre är sidan i den större kvadraten? Ge både ett exakt och ett ungefärligt svar, och glöm en sort.

8-6-114 Diagonalen i en kvadrat är 4 dm. Hur lång är kvadratens sida?

Nivå 2:

8-6-200 Lös ekvationen: $x^2 + 2x = 0$

8-6-201 Lös ekvationen: $x^2 - 2x = -1$

8-6-202 Lös ekvationen: $x^2 + 6x + 9 = 0$

8-6-203 Lös ekvationen: $x^2 - 12x + 11 = 0$

8-6-204 Lös ekvationen: $x^2 + 14x – 15 = 0$

8-6-205 Arean på en kvadrat är 64 m^2. Hur lång är kvadratens diagonal?

8-6-206 Ena sida på en rektangel är 4 cm längre än den andra. Rektangelns area är 192 cm^2. Hur långa är rektangelns sidor? Glöm ej sort när du svarar.

8-6-207 En rektangels sidor är 7 och 12 dm. Hur lång är diagonalen? Svara exakt, och ungefärligt, och glöm ej sort när du svarar.

8-6-208 Sidan i en liksidig triangel är 16 cm. Hur stor är höjden? Rita en figur och sätt ut de mått du känner till, så blir det lite enklare. Glöm ej sort när du svarar.

8-6-209 Ena sidan på en rektangel är 4 cm längre än den andra. Arean på rektangeln är 192 cm^2. Hur långa är sidorna? Rita en figur och sätt ut lämpliga mått. Sätt upp en lämplig ekvation och lös den. Glöm ej sort när du svarar.

Nivå 3:

8-6-300 Lös ekvationen: $x^2 + 4x = 2$

8-6-301 Lös ekvationen: $x^2 - 3x – 3 = 0$

8-6-302 Lös ekvationen: $2x^2 + 8x + 16 = 0$

8-6-303 Lös ekvationen: $3x^2 - 12x - 96 = 0$

8-6-304 En 30-60-90 graders triangel har hypotenusan 8 cm. Hur långa är de övriga sidorna?

8-6-305 Gyllene snittet är ett sätt att dela en sträcka i två delar så att det upplevs som harmoniskt för de flesta människor. Delningsförhållandet är $\sqrt{5}+1$ till 2. Dela sträckan 10 m efter det gyllene snittet!