

Namn:.....



7-2 Sammansatta händelser.

Inledning

Du vet nu vad som menas med sannolikhet. Det lärde du dig i kapitlet om just sannolikhet. Nu skall du tränga lite djupare i sannolikhetens underbara värld och studera sannolikheter för händelser som är oberoende av varandra. ”Vad är det för någonting, och vad har jag för nytta av det” undrar du kanske. Svaret är förvånansvärt enkelt. Du är omgiven av händelser i ditt dagliga liv, och kanske spelar du på lotto. Vad har du för chans att vinna?

Det här kapitlet kommer att innehålla en hel del bråkräkning, så om du är osäker på detta, så gå tillbaka och repetera! Vidare kommer du naturligt att komma i kontakt med potensräkning.

Vad menas med oberoende händelser?

Det framgår nästan direkt av frågan: två händelser är oberoende av varandra. Den ena inträffar eller inte helt oberoende av vad som händer i den andra händelsen. Om du har en tärning som är felfri och kastar den två gånger, så är resultatet i det andra kastet inte beroende av resultatet i det första kastet. Kan du komma på några fler händelser som är oberoende av varandra?

Svar:.....

.....

Visst, det finns massor. Om du drar ett kort ur en kortlek och därefter lägger tillbaka det, blandar och drar ett kort igen, så är resultatet av den andra kortdragningen inte beroende av vad som händer i den första dragningen. Om man slumpvis drar en kula ur en kulpåse med olika färgade kulor, lägger tillbaka kulan och drar en ny kula slumpvis, så är resultatet oberoende av vad som händer första gången.

Hur räknar jag ut sannolikheten vid oberoende händelser?

Vi tar ett exempel för att illustrera frågan i rubriken. Antag, att du skall kasta en tärning två gånger. Första gången skall du ha en tvåa och i det andra kastet skall du ha en femma. Hur beräknar du sannolikheten för att få en tvåa och därefter en femma i andra kastet? Har du någon idé? (ledning: vad är sannolikheten för att få en tvåa respektive en femma?)

Svar:.....

.....



Du resonerade säkert någonting i den här stilen: sannolikheten för att få en tvåa i första kastet är $1/6$. Sannolikheten för att få en femma i det andra kastet är $1/6$. Både det ena fallet **och** det andra måste ju inträffa. Det lilla ordet ”**och**” betyder att du skall använda – vilket räknasätt mellan de två delarna?

Svar:.....

Rätt: när du binder ihop en händelse ”**och**” en annan så betyder det att du multiplicerar sannolikheten för den första händelsen med sannolikheten för den andra händelsen. ”**och**” betyder med andra ord ”**gänger**”.

Svaret blir: $P(\text{tvåa}) \text{ ”och” } P(\text{femman}) = 1/6 * 1/6 = 1/36$

Du kan också resonera så här: Utfallsrummet för två kast med en tärning är $6*6 = 36$. Det första kastet har 6 möjliga utfall, och det andra lika många. Totalt blir det $6*6$ olika fall d.v.s. 36 st.

Det fall som du är ute efter är $P(\text{först en tvåa och därefter en femma})$. Det kan bara inträffa en gång.

$P(\text{först en tvåa och därefter femman}) = 1/36$. Samma svar som tidigare.



Sannolikhet vid oberoende händelser:

Om du har två eller fler **oberoende** händelser så blir den totala sannolikheten lika med sannolikheten för den första **multipliserat** med sannolikheten för den andra o.s.v

Några övningsuppgifter

Vi tar några exempel på sannolikheten för att två oberoende händelser skall inträffa. Redovisa dina fullständiga lösningar.

7-2-01 Du har ett mynt. Hur stor är sannolikheten att först få en krona och därefter i ett andra kast en klave?

Svar:.....

7-2-02 Vad är sannolikheten att du får först krona och därefter krona när du kastar ett mynt?

Svar:.....

7-2-03 Du kastar tärning. Vad är sannolikheten att först få ett jämt tal och i det andra kastet en sexa?

Svar:.....

7-2-04 Mer tärningskast vad är $P(\text{udda})$ och därefter $P(\text{jämt})$ på tärningen?

Svar:.....

7-2-05 Du drar ett kort, noterar vad du får och lägger tillbaka kortet i leken. Därefter blandar du och drar ett nytt kort. Vad är sannolikheten för att du först får en spader och därefter hjärter ess?

Svar:.....

7-2-06 I en låda finns 3 gula och 2 gröna kulor. Du drar en kula, noterar vilken färg den har, lägger tillbaka den och drar en till. Vad är sannolikheten för att du först drar en grön och därefter en gul kula?

Svar:.....

7-2-07 Samma låda med kulor som i 7-2-06 ovan. Vilken är sannolikheten att det blir gula kulor vid båda dragningarna?

Svar:.....

Som du märker löser du nu enkelt ganska komplicerade problem, som du tidigare aldrig trodde du skulle kunna lösa. Kul eller hur? Men ta det lugnt, det kommer mer! Du är inte mästare ännu.

Konsten att tippa 13 rätt

Du har säkert försökt bli miljonär på stryktips någon gång – och misslyckats. Vi skall undersöka möjligheterna att få 13 rätt. Stryktips går ut på att man skall gissa om det blir hemmavinst (etta) oavgjort (kryss) eller bortavinst (tvåa) i 13 fotbollsmatcher. Första frågan är given: Är händelserna oberoende av varandra? Vad tror du?

Svar:.....

Visst är dom det. Några uppgjorda matcher får inte förekomma.

Nästa fråga: hur stort är utfallsrummet på **en tipsrad**, d.v.s. hur många kombinationer kan teoretiskt uppstå. En knepig fråga, men vi tar det lite lugnt till en början, och startar med en rad.

Hur många kombinationer finns för en match?

Svar:.....

Det blev ju tre stycken: etta, kryss, tvåa. Summa tre.

Om du har två matcher: hur stort är utfallsrummet nu? Tänk till, för det är inte så enkelt.

Svar:.....

Du kanske resonerade någonting åt det här hållet: Vi har tre utfall per match. Om det är två matcher kan jag skriva upp antalet kombinationer. Den första matchens resultat kommer först och andra sedan:

1-1, 1-x, 1-2, x-1, x-x, x-2, 2-1, 2-x, 2-2. Totalt **nio** stycken.

Du kan även resonera så här: den första matchen kan sluta på 3 olika sätt, och den andra också på 3 olika sätt. Antalet kombinationer blir då $3 \cdot 3 = 9$ st.



Om du har tre matcher, hur många kombinationer kan du få då? Ta lite hjälp av resonemanget ovan.

Svar:.....

Rätt! Det blir $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ st. Du kan övertyga dig om att det är sant genom att skriva upp alla kombinationerna. Vi gör det lite systematiskt här under:

1-1-1, 1-1-x, 1-1-2, 1-x-1, 1-x-x, 1-x-2, 1-2-1, 1-2-x, 1-2-2

x-1-1, x-1-x, x-1-2, x-x-1, x-x-x, x-x-2, x-2-1, x-2-x, x-2-2

2-1-1, 2-1-x, 2-1-2, 2-x-1, 2-x-x, 2-x-2, 2-2-1, 2-2-x, 2-2-2

Det blev $3 \cdot 9 = 27$ kombinationer totalt.

Hur blir det nu om vi har 4 matcher: hur många kombinationer kan vi få?

Svar:.....

Just det: $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$ st. Som du märker växer antalet kombinationer lavinartat med antalet matcher.

Om vi tar alla 13 matcherna: hur många blir det nu då?

Svar:.....

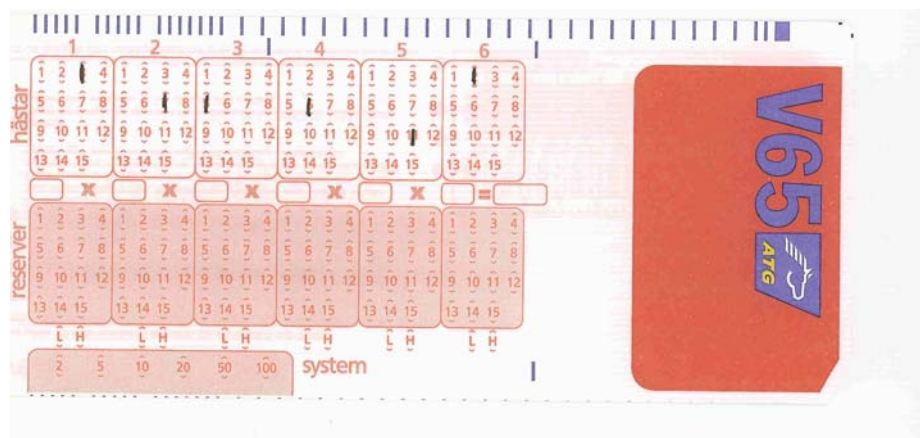
Visst: $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, eller 3 multiplicerat med sig själv 13 gånger. Detta kan du skriva om på en lite enklare form nämligen 3^{13} . Här har du en praktisk användning av potensräkning. Hur stort är talet om du räknar ut det?

Svar:.....

Det blev en del: 1 594 323. Om du tippas en rad så har du med andra ord 1 chans på 1 594 323 att vinna. Eller omvänt: om du skall helgardera så måste du tippa nästan 1,6 miljoner rader!

6 rätt på V65

På V65 spelar man på hästar. Det är 6 lopp, och varje lopp har 15 startande hästar. Det gäller att tippa den som vinner. Hur stort är utfallsrummet om du skall ha 6 rätt? Fundera lite, och tänk på hur det fungerade med tipset.



Svar:.....

Visst. Du kan till exempel resonera så här: om varje lopp har 15 möjligheter och det är 6 lopp. Då blir det totalt $15 \cdot 15 \cdot 15 \cdot 15 \cdot 15 \cdot 15$ tänkbara kombinationer eller 15^6 . Hur många blir det totalt?

Svar:.....

Det blev ju ganska många: 11 390 625 st.
--

7-2-08 Om enbart 12 hästar startar i varje lopp, hur stor blir då den statistiska chansen att få 6 rätt?

Svar:.....

7-2-09 Om 12 startar i lopp 1, 3 och 4 och 13 hästar startar i loppen 2, 5 och 6, hur stor är den statistiska chansen att få 6 rätt nu?

Svar:.....

Hur kan man ju förbättra sina odds att få 13 rätt på tipset eller 6 rätt på V65?

Svar:.....

Javisst. Genom att lära sig en hel del om hästar respektive fotbollslag kan du öka dina chanser avsevärt, men som du ser är de teoretiska chanserna till högsta vinsten mycket små.

Att vinna på Joker

På tipskupongen finns ett tilläggschans att vinna pengar, som kallas Joker. Det är ett 7-siffrigt förtryckt tal, och det kostar 10 kr att vara med. Högsta vinsten är stor. Satsar du din sista tia på en Jokerrad? Hur stor är sannolikheten att vinna, och hur kom du fram till ditt svar?

Svar:.....

Den blev ju inte så stor. Vi har 10 siffror, så varje position kan ha 10 utfall. Eftersom det är 7 siffror så blir antalet kombinationer $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$ eller 10^7 . Utläst som tal är det 10 miljoner. Så en chans på 10 miljoner har du till högsta vinsten. Inte mycket att satsa sin sista tia på eller hur?

Beroende händelser

Det kan emellertid hända att två händelser har ett beroende av varandra så att den andra händelsen beror på vad som var utfallet i den första händelsen. Exempel på detta är följande:

I en kulpåse ligger 5 blåa kulor och tre vita. Vilken är sannolikheten att man drar först en vit och därefter en blå kula?

Här ser du att den andra händelsen beror på vad som inträffat vid den första händelsen.

Definition: I en beroende händelse (kallas även för en **betingad händelse**) är sannolikheten beroende av vad som inträffat tidigare.

Vi tar några exempel så du förstår skillnaden.

Antag att sannolikheten för att råka ut för en viss olycka är $1/1000$. Vilken är sannolikheten för att råka ut för samma olycka två gånger? Är händelsen beroende eller oberoende?

Svar:.....

Se exemplet ovan. Kalle har råkat ut för olyckan en gång. Vilken är sannolikheten för att han råkar ut för olyckan en andra gång? Är händelsen beroende eller oberoende?

Svar:.....

Det här var ju lite knepigt. I första fallet är det två händelser som skall inträffa, och du har ett beroende mellan de två. I det andra fallet har en händelse redan inträffat. Då är sannolikheten för att den andra händelsen skall inträffa $1/1000$. Vi har inget beroende. Samtidigt kan man ju alltid säga att om man råkar ut för en olycka så ändrar man sitt beteende. Därmed påverkar man sannolikheten för att olyckan händer en andra gång, och händelserna blir beroende.

7-2-10 I en påse ligger 5 gula och tre vita kulor. Vad är sannolikheten för att du först drar en vit och därefter en gul kula utan att lägga tillbaka den första kulan?

Svar:.....

7-2-11 Samma fråga som ovan, men här lägger du tillbaka den första kulan innan du drar en andra gång.

Svar:.....

Dagens gåta:

Hokuspokusfiliokus. Hur skriver man det med tre bokstäver?

Be din lärare titta på dina lösningar. Fler uppgifter finns på kommande sidor. Det här kräver en hel del funderande, men det var ganska kul-eller hur?



7-2 Sammansatta händelser. Träningsuppgifter

Nivå 1

- 7-2-100 Du drar två kort i en kortlek. Vad är sannolikheten för att du först får hjärter ess och därefter klöver dam?
- 7-2-101 Du drar två kort i en kortlek. Vad är sannolikheten för att du först får hjärter två och därefter klöver dam?
- 7-2-102 Du drar två kort i en kortlek. Vad är sannolikheten för att du först får en tia och därefter en femma?
- 7-2-103 Du kastar en tärning en gång och noterar resultatet. Därefter kastar du en gång till. Vilken är sannolikheten för att du får först en sexa och därefter en etta?
- 7-2-104 Du kastar en tärning en gång och noterar resultatet. Därefter kastar du en gång till. Vilken är sannolikheten för att du får först en sexa och därefter ytterligare en sexa?
- 7-2-105 Du kastar en tärning en gång och noterar resultatet. Därefter kastar du en gång till. Vilken är sannolikheten för att du får först en etta och därefter en tvåa?
- 7-2-106 Du kastar en tärning en gång och noterar resultatet. Därefter kastar du en gång till. Vilken är sannolikheten för att du får först en trea och därefter en etta?

- 7-2-107 Du kastar en felfri tärning 5 gånger och får sexa alla 5 gångerna. Du kastar tärningen en sjätte gång. Vilken är sannolikheten för att du får en sexa?
- 7-2-108 Du drar ett kort i en kortlek och därefter kastar du en tärning. Vad är sannolikheten för att du får en spader och därefter en sexa?
- 7-2-109 Alfabetet innehåller 29 bokstäver. Vilken är sannolikheten för att en apa (som inte vet hur ett tangentbord är uppbyggt) på måfå skriver ordet ”på”?

Nivå 2:

- 7-2-200 Du drar två kort i en kortlek. Vad är sannolikheten att du först får hjärter fem och därefter en ruter?
- 7-2-201 Du drar två kort i en kortlek. Vad är sannolikheten för att du först får en hjärter och därefter en klöver?
- 7-2-202 Du drar två kort i en kortlek. Vad är sannolikheten för att du först får ett ess och därefter klöver dam?
- 7-2-203 Du kastar tärning två gånger. Vilken är sannolikheten för att du först får ett udda tal och därefter ett jämt tal?
- 7-2-204 Du kastar tärning två gånger. Hur stor är sannolikheten för att du får fyra eller högre i båda fallen?

7-2-205 Du drar två kort från en kortlek.
Vilken är sannolikheten för att du
först får en klöver och därefter en
ruter?

Nivå 3:

7-2-300 I en låda ligger 3 röda, 4 gröna och
5 gula kulor. Du drar slumpvis två
kulor. Vilken är sannolikheten för
att du först får en grön och därefter
en röd?

7-2-301 I en låda ligger 3 röda, 4 gröna och
5 gula kulor. Du drar slumpvis två
kulor. Vilken är sannolikheten för
att du först får en gul och därefter
en röd?

7-2-302 I en låda ligger 3 röda, 4 gröna och
5 gula kulor. Du drar slumpvis två
kulor. Vilken är sannolikheten för
att du först får en gul och därefter
en grön?

7-2-303 I en låda ligger 3 röda, 4 gröna och
5 gula kulor. Du drar slumpvis två
kulor. Vilken är sannolikheten för
att du först får en grön och därefter
ytterligare en grön?

7-2-304 Du tippar en rad på tips. Hur stor är
sannolikheten för att få minst 12
rätt?