

4-9 Rymdgeometri

Namn:.....

Inledning

Rymden har alltid fascinerat. Men vad menas med rymd i matematisk eller geometrisk mening? Här skall du få studera 3-dimensionella figurer och hur man beräknar volymen och arean på dem. Du har tidigare studerat vad som menas med en linje. Vad är utmärkande för den?

Svar:.....

Därefter studerade du ytor, och lärde dig beräkna areor för några vanliga figurer. Vad kännetecknar en yta?

Svar:.....

Nu tar vi ett steg till, och börjar prata om volymer. Vad tror du utmärker en volym?

Svar:.....

Visst. Det är någonting som har tre dimensioner. Linjen hade en dimension, ytan hade två och volymen har tre dimensioner. Finns det fler än tre dimensioner?

Svar:.....

Inte så lätt att besvara. I praktiken – nej, men som matematisk konstruktion - ja. Människan har svårt att tänka sig fler dimensioner än tre. Einstein blandade in tiden och ville ha ett samband mellan längd, bredd, höjd och tid. Men det är överkurs!

Kuben

Du vet säkert vad en kubikmeter är. Försök att förklara nedan

Svar:.....

.....

Inte helt enkelt. Men det blev kanske någonting i den här stilen: En kubikmeter är volymen av en kub, det vill säga geometrisk figur i tre dimensioner som har alla sidor lika med en meter, och där alla vinklar är räta.

I och med att figuren är 3-dimensionell så blir sorten längd * längd * längd det vill säga längd^3 . Om alla mått uttrycks i meter, m, så blir alltså volymen i m^3 .

4-9-01 Klossen på bilden är ingalunda en kubikmeter, men den kan få bli en illustration. I en godtycklig kub är alla sidor lika långa. Volymen beräknas – ja hur då?

Svar:.....

4-9-02 Och vad blir det för sort om man mäter längderna till exempel i cm?

Svar:.....



Just det. Har vi sidan i cm så blir volymen i $\text{cm} \cdot \text{cm} \cdot \text{cm}$ eller cm^3 .

4-9-03 Om sidan på en kub mäts i m vilken enhet uttrycks volymen i?

Svar:.....

4-9-04 Om sidan på en kub mäts i km blir volymen i enheten

Svar:.....

4-9-05 Sidan på en kub är 5 cm. Hur stor är kubens area?

Svar:.....

Visst. Kuben byggs ju upp av kvadrater, och varje kvadrats area har arean $5 \cdot 5 = 25 \text{ cm}^2$. Eftersom det finns 6 sidor på kuben så blir den totala arean $6 \cdot 25 = 150 \text{ cm}^2$.

Sammanfattning:

Kubens volym = $\text{sidan} \cdot \text{sidan} \cdot \text{sidan}$ eller sidan^3 .

Kubens area = $6 \cdot \text{sidan} \cdot \text{sidan}$ eller $6 \cdot \text{sidan}^2$.

Sortförvandlingar i tre dimensioner

Rubriken låter krånglig, men det är inte så konstigt som det kan låta.

Du lärde dig att förvandla ytmått, till exempel genom att förvandla en m^2 till dm^2 . Eftersom det går 10 dm på en m, och det gäller en area med längd och bredd, så blev det $10 \cdot 10 \text{ dm}^2 = 100 \text{ dm}^2$ på en m^2 . Eller hur. Om du skall bestämma hur många dm^3 det blir på en m^3 Hur bär du dig åt nu? Tänk till lite, och utgå från att du bygger upp kubikmetern genom att stapla klossar om en dm^3 på längd, bredd och höjd.

Svar:.....

Visst. Det blir 10 stycken på längden, 10 stycken på bredden och 10 stycken på höjden, totalt $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000 \text{ dm}^3$ på en m^3

Hur många cm^3 går det på en dm^3 ?

Svar:.....

Och hur många mm^3 går det på en cm^3 ?

Svar:.....

Nu hoppar vi lite. Hur många cm^3 går det på en m^3 ?

Svar:.....

Hur många mm^3 går det på en dm^3 ?

Svar:.....

Sortförvandlingar:

$$1 \text{ m}^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ dm}^3$$

$$1 \text{ dm}^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \text{ cm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$$

$$1 \text{ cm}^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \text{ mm}^3 = 1000 \text{ mm}^3$$

jämför:

$$1 \text{ m} = 10 \text{ dm}$$

$$1 \text{ m}^2 = 100 \text{ dm}^2$$

$$1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ dm}^3$$

Fler sortförvandlingar:

En $\text{dm}^3 = 1$ liter förkortas med litet "l": 1

En deciliter, 1 dl = 1/10 l. deci betyder tiondel

En centiliter, 1 cl = 1/100 l. centi betyder hundradel

En milliliter, 1 ml = 1/1000 liter. milli betyder tusendel

En ml = 1 cm^3



4-9-06 Hur många liter motsvarar 3720 cm^3 ?

Svar:.....

4-9-07 Hur många cm^3 är en ml (milliliter)?

Svar:.....

4-9-08 Hur många l är 4500 ml?

Svar:.....

4-9-09 Hur många m^3 är 280 l?

Svar:.....

Rätblock

En kub är den enklaste formen av ett rätblock.

Med ett **rätblock** menas en tredimensionell figur där motstående sidor är lika stora och där alla vinklar är räta. En kloss eller en kartong eller en låda är ett rätblock.



Hur skall man beräkna volymen av ett rätblock förutsatt att alla mått är givna?

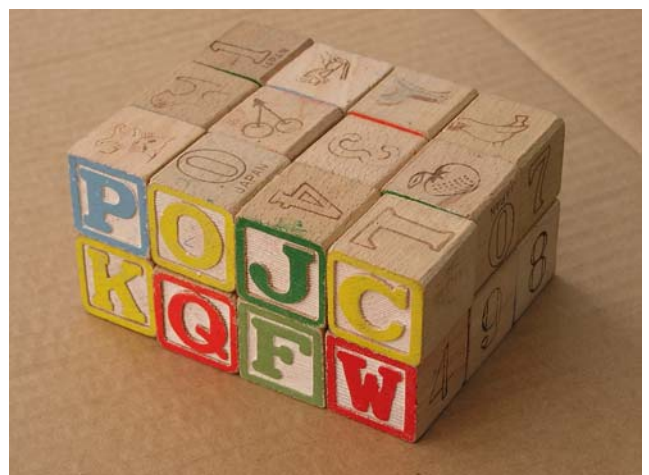
Svar:.....

Visst. Se rätblocket som en uppsättning kuber. Om det är 4 enheter långt, tre enheter brett och 2 enheter högt så blir det totalt $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ kubikenheters volym. Enkelt. Titta på figuren med klossar som du lekte med som barn.

Vi tar några exempel.

4-9-10 Ett rätblock har dimensionerna längd: 4 m, bredd: 2 m och höjd 6 m. Hur stor är volymen? Glöm ej sort när du svarar.

Svar:.....



4-9-11 Hur stor är ytan på rätblocket ovan? Glöm ej sort när du svarar, och tänk på hur många sidor det finns totalt!

Svar:.....

4-9-12 Om sidorna på ett rätblock ges i olika sorter, till exempel längd i m, bredd i cm och höjd i dm, hur gör du nu när du räknar ut rätblockets volym eller area?

Svar:.....

Sammanfattning rätblock

Volymen på ett rätblock får du om du multiplicerar längd, bredd och höjd, eller basytan*höjden.

Eftersom volymen byggs upp av tre dimensioner, längd, bredd och höjd blir sorten längd^3 .

Arean på ett rätblock byggs upp av 6 sidor som parvis är lika stora. Sorten blir längd^2 .

Cylindern

Figuren på bilden är naturligtvis en konservburk, men ur matematisk synvinkel kallar vi den för en cylinder. Är det fråga om en 3-dimensionell figur och om svaret är ja: varför?

Svar:.....

Visst är det en 3-dimensionell figur! Den har ju längd, bredd och höjd. Låt vara att längden och bredden byggs upp av en cirkel. Om du glömt bort cirkelns egenskaper: gå tillbaka och repetera detta.

4-9-13 Om cirkelns radie är 6 cm och höjden är 7 cm hur vill du räkna ut cylinderns volym? (jämför med hur du räknade ut volymen på ett rätblock)

Svar:.....

4-9-14 Om cirkelns radie är 6 cm och höjden är 7 cm, hur stor blir cylinderns area? (tänk på att cylindern har tre delar: lock och botten samt en välvd sidoyta)

Svar:.....



Sammanfattning cylindern:

Volymen på en cylinder beräknas genom att man multiplicerar basytan med höjden.

På matematikspråk blir det: $\pi r^2 h$

Arean på en cylinder är summan av lockets och botten area.

På matematikspråk blir det: $2\pi r^2 + 2\pi r h$

Klotet

En boll kallas på matematikspråk för ett klot. Du känner igen ordet bland annat från en annan boll: jordklotet, eller om du bowlar så använder du ett bowlingklot.

Är klotet en tredimensionell figur? Motivera ditt svar.

Svar:.....

Visst är det så. Ett klot bereder ut sig så att man kan mäta längd, bredd och höjd, låt vara att det blir lite mer komplicerat än vanligt eftersom allting är runt.

Hur uppstår ett klot ur matematisk synvinkel? Ta en funderare, och varför inte jämföra med en cirkels egenskaper.

Svar:.....

Inte så lätt att tänka i tre dimensioner! En cirkel är en figur i två dimensioner som sammanbinder punkter som ligger på ett visst avstånd, radien, från cirkelns medelpunkt. Det fungerar på samma sätt med ett klot, fast nu rör vi oss i tre dimensioner. Men avståndet mellan klotets medelpunkt och en punkt på ytan är konstant eller lika med klotets radie. Om så inte vore fallet blev ju inte klotet runt.

Att härleda klotets volym och yta som funktion av radien, som ju är det enda mått som bestämmer storleken på klotet, är ett företag. Det hoppar vi över här, och konstaterar att det var lite enklare för rätblocken och cylindrarna! Pi borde under alla förhållanden vara inblandat, och när det gäller volymen så borde r^3 vara med, och när det gäller arean r^2 .

De här formlerna är ingenting du behöver lära dig utantill. Kom ihåg att dom finns här om du behöver dem senare!



Klotet.

$$\text{Klotets volym} = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

$$\text{Klotets area} = 4\pi r^2$$

4-9-15 En sfär har radien 6 cm. Hur stor är arean?

Svar:.....

4-9-16 En tennisboll har diametern 6 cm. Hur stor volym har tennisbollen?

Svar:.....

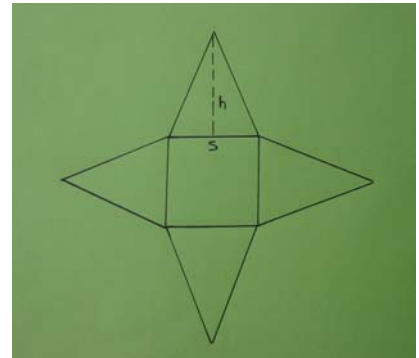
Pyramiden

Egyptierna är kända för sina regelbundna pyramider. Vad kännetecknar en pyramid? Tänk till lite!

Svar:.....
.....

Det var inte så enkelt, men titta här under, så får du se om du svarat rätt.

En regelbunden pyramid står på en kvadratisk yta. Sidorna i pyramiden är likbenta trianglar, och eftersom kvadraten har fyra sidor så blir det fyra liksidiga trianglar. Om du lägger allting platt så får du det hela att se ut som i figuren bredvid. Klipper du ut figuren och viker upp sidorna så att de får kontakt med varandra så blir det en pyramid.



Hur beräknar man volymen på en pyramid? Basytan ser ut att ha en viss betydelse, liksom hur hög pyramiden är. Med höjden menar vi avståndet från pyramidens spets till basytan.

Om vi kallar basytan för $B \text{ m}^2$ och höjden $h \text{ m}$, så blir pyramidens volym V :

$$V = \frac{B * h}{3} \text{ m}^3$$

Det är inte så lätt att bevisa detta, så du får acceptera fakta. Hur stor blir pyramidens sammanlagda area?

Vi antar att kvadratens sida är $s \text{ m}$ lång och att trianglarnas höjder (de är lika långa alla fyra) är $h \text{ m}$. (Vi använder någonting annat än h eftersom det betecknade vi pyramidens höjd med, och nu är vi ute efter trianglarnas höjder. Vi betecknar Pyramidens area med A , och den blir:

$$A = s^2 + 4 * \frac{s * h}{2} = s^2 + 2 * s * h \text{ m}^2$$



Sammanfattning pyramiden:

$$\text{Pyramidens volym } V = \frac{B * h}{3}$$

$$\text{Pyramidens hela area } A = s^2 + 2 * s * th$$

Konen

En kon är ingenting annat än en stjärngossestrut. Hur tillverkar du en sådan?

Svar:.....

.....

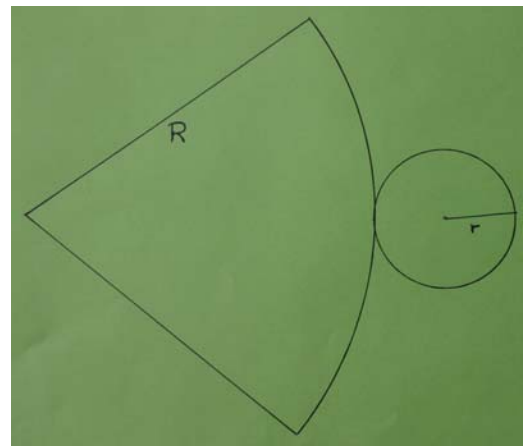
Visst. Du behöver en passare och en linjal, ett styvt ark och en sax. Sedan tar du ett mått i passaren som motsvarar längden på konens sida och slår upp en cirkelbåge. Bågens längd styrs av hur stort huvud du har. Arean på den cirkelsektor som du nu konstruerar kallas för konens mantelyta, och den bestäms med andra ord av hur hög konen skall bli (styrs av radien på cirkelsektorn) samt hur lång bågen på cirkelsektorn skall vara.

Se figurerna till höger.

Så här ser det ut när vi startar. Efter det du klippt ut figuren så blir det som bilden nedanför. Om du inte vill ha med basytan, så hoppar du över den lilla cirkeln.

Konens volym beräknas på samma sätt som för pyramiden. Du betecknar konens höjd med H och basytan med B . Då blir volymen:

$$V = \frac{B * H}{3} \text{ m}^3$$



Om radien på basytans cirkel är r , så kan du lätt räkna ut basytan B med hjälp av formeln:

$$B = \pi * r^2$$

Mantelytan är lite knepigare att ta reda på. Du måste ha basytans cirkelradie samt radien för den stora cirkel som bygger upp mantelytan.



Sammanfattning konen:

$$\text{Konens volym } V = \frac{B * h}{3} \text{ m}^3$$

Veckans gåta:

Varför tog det så lång tid för Brahms att komponera sin berömda vaggång?

Be din lärare titta på dina lösningar. Det kan bli fler träningsuppgifter på de kommande sidorna!



4-9 Rymdgeometri. Träningsuppgifter

Nivå 1:

- 4-9-100 Vad menas med en kub?
- 4-9-101 Vad menas med ett rätblock?
- 4-9-102 En kub har sidan 7 cm. Hur stor är kubens volym? Glöm ej sort när du svarar.
- 4-9-103 En kub har sidan 12 dm. Hur stor yta har kubens ytor? Glöm ej sort när du svarar.
- 4-9-104 En låda har innermått: bredd 8 dm, höjd 2 dm och djup 4 dm. Hur mycket rymmer lådan? Glöm ej sort när du svarar.
- 4-9-105 Ett hus har följande innermått: Längd 12 m, bredd 6 m och höjd 2,4 m. Hur mycket luft finns i huset? (bortse från mellanväggar) Glöm ej sort när du svarar.
- 4-9-106 En person tänker anlägga en swimmingpool i sin trädgård. Den skall ha måtten 5x12 m, och vara 2m djup. Hur mycket vatten går det åt för att fylla poolen? Svara med lämplig sort.
- 4-9-107 Hur många l är 23 dl?
- 4-9-108 Hur många dm^3 är 3200 ml?

- 4-9-109 Hur många m^3 är $450 dm^3$?
- 4-9-110 Hur många cm^3 är 1700 ml?
- 4-9-111 Du skall tillverka en tank i form av ett rätblock. Måtten skall vara: längd 1,6m, bredd 1,5 m och höjd 1,2 m. Hur mycket plåt går det åt för att tillverka tanken? Glöm ej sort när du svarar.
- 4-9-112 Vad menas med en rak cylinder? Beskriv vad som menas med denna figur.
- 4-9-113 En cylinder har diametern 12 cm och höjden 20 cm. Hur mycket rymmer cylindern? Glöm ej sort när du svarar.
- 4-9-114 En cylinder har radien 8 dm och höjden 34 dm. Hur stor är cylinderns area? Glöm ej sort när du svarar.
- 4-9-115 En cistern för diesel har följande mått: diameter 2m, höjd 3m. Hur mycket rymmer cisternen?
- 4-9-116 Ett klot har diametern 1m. Hur stor yta har klotet? Svara med sort.
- 4-9-117 En boll har diametern 12 cm. Hur stor yta har bollen?
- 4-9-118 En pyramid har basytan $60 cm^2$ och höjden 8 cm. Hur stor volym har pyramiden? Svara med sort.

Nivå 2:

4-9-200 Hur många ml är 2,7 dl?

4-9-201 Hur många l är 32 ml?

4-9-202 Hur många dm^3 är 1 ml?

4-9-203 Cheopspyramiden utanför Kairo är 146 m hög, och har basytan i form av en kvadrat med sidan 124 m. Hur stor volym har pyramiden? Glöm ej sort när du svarar.

4-9-204 Cheopspyramiden har 4 sidor i form av liksidiga trianglar. Sidan är 124 m. Om Egyptierna tänkte sig att belägga pyramiden med vit kalksten, hur många kvadratmeter skulle det ha gått åt?

Nivå 3:

4-9-300 Förvandla 35 ml till dm^3 !

4-9-301 Hur många cm^3 är 0,4 dl ?

4-9-302 Förvandla 87 ml till dm^3 !

4-9-303 Jorden har omkretsen 4000 mil. Hur stor är jordklotets volym? Glöm ej sort när du svarar.

4-9-304 Ett klot är inskrivet i en kub med sidan 2 m^3 . Hur stor är volymen som ligger innanför kuben men utanför klotet?

4-9-305 Du har en kub med sidan 2 m och en sfär med diametern 2 m. Vilken figur har den minsta ytan i förhållande till sin volym?