

Namn:.....



4-8 Cirklar

Inledning

Du har arbetat med fyrhörningar (parallelogrammer) och trehörningar (trianglar). Nu skall du studera en figur som saknar hörn, och som består av en "böjd" linje. Den kallas för cirkeln. Den skiljer sig en hel del från det som du kommit i kontakt med hittills. Du skall lära dig vad en cirkel är och hur du kan beräkna cirkelns yta och omkrets. Som överkurs får du lära dig vad en cirkelsektor är och beräkna cirkelbågens längd och arean av en cirkelsektor.

Men vi börjar med en fråga: "Hur vill du definiera vad en cirkel är?" Ledning: tänk på hur du ritat upp en cirkel med hjälp av en passare.

Svar:.....
.....
.....
.....

Cirkeln

Det som bygger upp en cirkel är en punkt, och en böjd sluten linje runt omkring punkten. Vi kan kalla punkten för cirkelns **medelpunkt**, och den runda linjen runt för cirkelns **periferi**.

Vilket samband står punkterna på periferin till cirkelns medelpunkt?

Svar:.....

Just det. Avståndet mellan vilken punkt som helst på periferin och cirkelns medelpunkt är lika stort!

Vi kan alltså definiera en cirkel på följande sätt:

Definition:

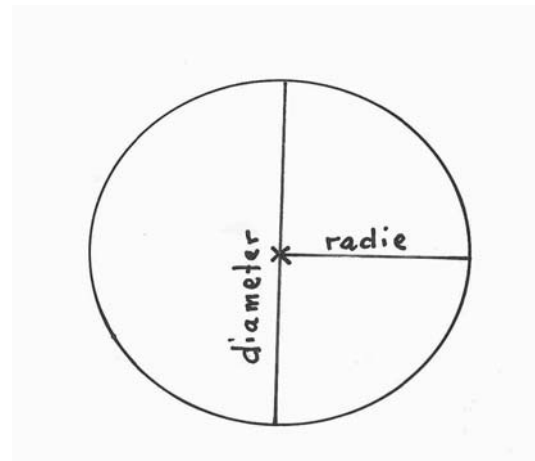
En cirkel förbinder alla punkter som ligger **på samma avstånd** till cirkelns medelpunkt.

Avståndet kallas för cirkelns **radie**. Dubbla detta avståndet, d.v.s. ett avstånd från en punkt på periferin genom medelpunkten och till periferin på andra sidan kallas för cirkelns **diameter**.

Diametern är med andra ord lika med **dubbla radien**.

Det låter lite konstigt, så vi tittar på figuren bredvid.

Kolla genom att mäta avståndet från medelpunkten och några punkter på periferin. Stämmer det? Visst! Det ligger ju i cirkelns definition.



Radien betecknas ofta med **r** och
Diametern betecknas ofta med **d**

Hur ritar jag en cirkel?

Enkelt. Du använder en passare. Den ställer du in för cirkelns radie, sätter metallspetsen i det som skall bli cirkelns medelpunkt och med en lätt handrörelse för den andra spetsen runt ett varv så du får en cirkel. Det kan kräva lite teknik, men är inte speciellt svårt. Hämta en passare och gör cirklar med radien 1 cm, 2 cm, 3 cm och 5 cm.

Förhållandet mellan cirkelns omkrets och dess diameter.

Cirkeln har en annan intressant egenskap. Du skall göra ett antal mätningar, och du behöver följande:

1. Ett måttband
2. Ett snöre
3. Ett antal olika cirklar. Du kan ta tallrikar, karotter, bilhjul, cykelhjul, runda bord.....

Utförande:

Välj ut minst fyra cirkelrunda saker. Ju större desto bättre. Tag ditt måttband, och för varje cirkel mäter du omkretsen och cirkelns diameter. Anteckna i tabellen nedan. Därefter dividerar du omkretsen med diametern för varje cirkel. Var noga med sorterna!

	Omkrets	Diameter	<u>omkrets</u> diameter
1.
2.
3.
4.
5.

Cirkelns omkrets

När du studerar kvoten mellan omkretsen och diametern för de olika cirklarna, finner du något speciellt?

Svar:.....

Just det: kvoterna är ungefär lika, och lite drygt 3. Och detta gäller för alla cirklar. Ju noggrannare man mäter, desto närmare ett bestämt tal kommer man. Detta magiska tal kallas för pi, och har symbolen π , och är inget exakt tal. π är ungefär lika med 3,14159..... Om man inte har så stor noggrannhet så kan man sätta π till 3 annars 3,14.

I och med att omkretsen/diametern = π så betyder detta att om diametern d är given så är omkretsen $O = \pi * d$ eller $O = 2 * \pi * r$ (eftersom $d=2*r$)

Sammanfattning:

Cirkelns omkrets $O = 2\pi r$ eller πd

Vi tar några övningsexempel på detta. När du svarar: glöm ej sort! $\pi = 3,14$. Använd räknare!

4-8-01 En cirkels radie är 4 cm.

Hur stor är cirkelns omkrets?

Svar:.....

4-8-02 En cirkels diameter är 80m.

Hur stor är omkretsen?

Svar:.....

4-8-03 En cirkels radie är 7 cm.

Hur stor är diametern?

Svar:.....

4-8-04 En cirkels diameter är 42 cm.

Hur stor är radien?

Svar:.....

4-8-05 Hur stor är omkretsen på cirkeln i uppgift 4-8-04?

Svar:.....

Cirkelns area

Det var lite knepigt att bestämma cirkelns omkrets. Inte undra på: det är ju fråga om en rund cirkelperiferi, och ingen rak linje. Då brukar det bli lite svårare.

Hur är det med cirkelns area? Inte så enkelt det heller. Talet π kommer även här att vara inblandat som en faktor. Vi skall resonera lite, och till en början jämföra med kvadraten.

Om man dubblar en kvadrats sida, hur många gånger större blir kvadratens area?

Svar:.....
.....

Vi betecknar kvadratens sida med a . a kan vara vilket tal som helst. En kvadrat med sidan a har arean $a \cdot a$ eller a^2 . Dubblar vi sidan, så blir den $2a$, och arean blir $(2a)^2 = 2a \cdot 2a$ dvs $4 \cdot a^2$. Arean blir med andra ord 4 ggr så stor.

Om du dubblar en cirkels radie, hur mycket större blir arean tror du?

Svar:.....

Precis! Den borde bli 4 ggr så stor. Vi rör oss ju i två dimensioner, och vi skalar upp cirkeln med en faktor 2 i varje dimension, alltså totalt 4 ggr.

Vi ”klipper till” med följande formel:

$$\text{Cirkelns area } A = \pi \cdot r \cdot r \text{ eller } A = \pi r^2$$

Här kommer det magiska talet π in i bilden igen. Eftersom $r = \frac{d}{2}$ så kan vi även skriva:

$$A = \pi \cdot \frac{d^2}{4} \qquad \left(\frac{d}{2} \cdot \frac{d}{2} = \frac{d^2}{4} \right)$$

Vi tar några räkneexempel på cirkelns area. Bestäm cirkelns area i nedanstående uppgifter. $\pi = 3,14$, och svara med rätt sort. Använd räknare.

4-8-06 En cirkels radie är 6 cm. Hur stor är arean?

Svar:.....



4-8-07 En cirkel har diametern 8 m.
Hur stor är arean?

Svar:.....

4-8-08 En rondell skall beläggas
med gräs, som köps färdigt.
Diametern är 20 m. Hur
många m² gräs skall man
minst köpa?

Svar:.....

4-8-09 Ett fönster har formen av en
halvcirkel. Radien är 12 dm.
Hur mycket glas finns det i
fönstret?

Svar:.....

4-8-10 Fönstret i 4-8-09 skall tätas
med tätninglist runt hela
fönstret. Hur mycket list går
det åt?

Svar:.....

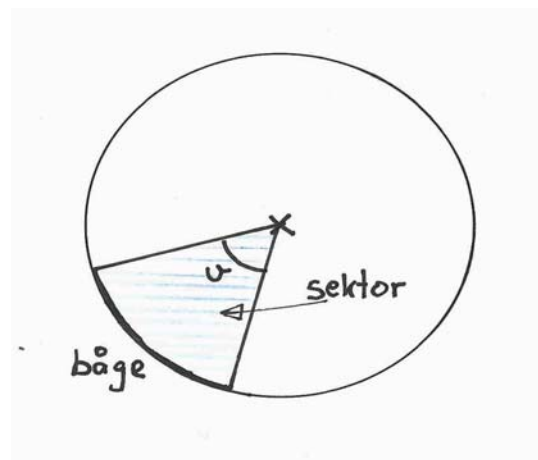
Lite övertkurs: Cirkelsektor

Om man drar två radier med en viss vinkel i en cirkel, så får man en cirkelsektor. Se det streckade området i figuren. Den del av periferin som begränsar cirkelsektorn kallas för en **cirkelbåge**.

Längden av en cirkelbåge

Du har lärt dig att beräkna en cirkels omkrets under förutsättning att radien är given. Om du har en halvcirkel, hur lång blir cirkelbågen då? Beteckna radiens längd med r .

Svar:.....



Har du i stället en kvarts cirkel (cirkelsektorns vinkel är 90 grader) hur lång blir bågen nu?

Svar:.....

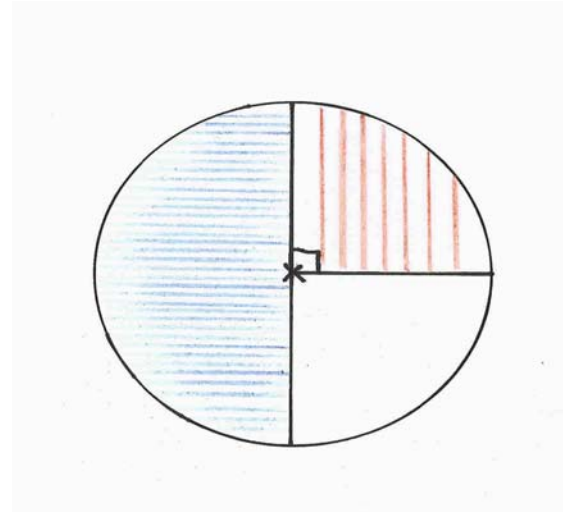
Nu har du en cirkelsektor med en godtycklig vinkel v , och radien r . Kan du nu räkna ut bågens längd? Det verkar totalt hopplöst, men tänk efter lite, speciellt vad du gjort med halvcirkeln och kvartscirkeln nyss. Tänk också på att ett varv är 360 grader.

Svar:.....

.....

.....

.....



Det blev ett teoretiskt och ganska svårt resonemang. Någoting i den här stilen:

1. Cirkelns hela omkrets är $2 * \pi * r$
2. Den **del av cirkelns hela centrumvarv** som sektorn upptar är $\frac{v}{360}$
3. Då får du multiplicera hela omkretsen med den del som sektorn har av hela varvet. Det blir med andra ord så här:
4. Cirkelbågens längd $= 2 * \pi * r * \frac{v}{360}$

Ganska krångligt, men logiskt när du tänker efter.

Mer överkurs: Arean av en cirkelsektor

En cirkelsektor har givetvis också en area. Den kan beräknas om man känner cirkelns radie och cirkelsektorns vinkel. Eftersom du kan beräkna hela cirkelns area och vet hur stor del av hela cirkeln som sektorn upptar, så kan du kanske tala om hur man gör. Jämför med resonemanget ovan.

Svar:.....

.....

1. Cirkelns hela area $= \pi * r^2$
2. Cirkelsektorn upptar en del av det totala varvet, nämligen $\frac{v}{360}$
3. Cirkelsektorns area A blir då: $A = \pi * r^2 * \frac{v}{360}$

Ånyo ett komplicerat uttryck, men det går att begripa innebörden. Läs igenom en gång till så förstår du bättre.

Definitioner:

Om centrumvinkeln är **90 grader** så har vi en **kvarts cirkel** (en fjärdedels varv)

Om centrumvinkeln är **180 grader** så har vi en **halv cirkel** (ett halvt varv)

Vi tar några övningsuppgifter:

4-8-11 En cirkelsektor har radien 2 dm och vinkeln 30 grader. Beräkna cirkelbågens längd. Glöm ej enhet i ditt svar.

Svar:.....

4-8-12 Beräkna cirkelsektorns area i uppgiften 4-8-11 ovan. Sätt dit rätt enhet i ditt svar!

Svar:.....

4-8-13 En cirkelsektor har radien 20 m och vinkeln 90 grader. Beräkna bågens längd.

Svar:.....

4-8-14 En cirkelsektor har radien 4 dm och vinkeln 180 grader. Hur står är sektorns area?

Svar:.....

Sammanfattning cirkeln:

En cirkel är en oändlig mängd punkter som ligger på ett bestämt avstånd från en punkt.

Avståndet till punkten kallas **radien** och punkten kallas **medelpunkten**, och punkterna bygger upp cirkelns **periferi**

Cirkelns linje som dras genom medelpunkten och förbinder två punkter på periferin kallas cirkelns **diameter**.

Förhållandet mellan cirkelns omkrets och diameter är konstant, och kallas pi, Π .

Omkretsen = $2 * \pi * r$ eller $\pi * d$

Cirkelns **Area** = $\pi * r^2$ eller $\pi * \frac{d^2}{4}$

Veckans gåta:

Var sover lejonkungen Simba?

Visa upp dina resultat för din lärare och diskutera eventuella oklarheter. Jobba sedan vidare med träningsuppgifterna.



4-8 Cirklar. Träningsuppgifter

Nivå 1:

- 4-8-100 Vad menas med en cirkels periferi?
- 4-8-101 Vad menas med en cirkels omkrets?
- 4-8-102 Vad menas med en cirkels diameter?
- 4-8-103 Vad menas med en cirkels radie?
- 4-8-104 Om radien är känd: hur räknar du ut cirkelns diameter?
- 4-8-105 Om radien är känd: hur räknar du ut cirkelns omkrets?
- 4-8-106 Om radien är känd: hur räknar du ut cirkelns area?
- 4-8-107 En cirkel har radien 10 cm. Hur stor är omkretsen?
- 4-8-108 En cirkel har diametern 12 m. Hur stor area har cirkeln?
- 4-8-109 En klocka har en sekundvisare som är 20 cm lång. Hur långt färdas visarens spets på en minut?
- 4-8-110 Ett drivhjul till ett gammalt ånglok har diametern 1800 mm. Hur stor är omkretsen?



Nivå 2:

- 4-8-200 En cirkel har omkretsen 44 cm. Hur stor är diametern?
- 4-8-201 Ett 18-tums däck har diametern 61 cm. Hur många varv gör däcket om bilen körs 10 mil?
- 4-8-202 Vad är talet π ett mått på?
- 4-8-203 En cirkel har radien 40 m. En sektor har medelpunktsvinkeln 60 grader. Hur lång är bågen i cirkelsektorn?
- 4-8-204 En cirkel har radien 20 cm och en annan har radien 60 cm. Hur många gånger större omkrets har den stora cirkeln jämfört med den lilla?

Nivå 3:

- 4-8-300 Hur många gånger större area har en 12 tums bashögtalare jämfört med en 8 tummare? Måtten är på högtalarens diameter. En tum = 2,54 cm.
- 4-8-301 En cirkel har radien 8 cm. En sektor har medelpunktsvinkeln 120 grader. Hur stor är cirkelsektorns area?
- 4-8-302 En cirkel är inskriven i en kvadrat. Kvadratens sida är 42 cm. Hur stor area ligger utanför cirkeln men innanför kvadraten?
- 4-8-303 En tunna (en cylinder) har diametern 1 m och höjden 2 m. Hur stor är tunnans totala area?
- 4-8-304 I en cirkel med diametern 12 cm har man stansat ut tre cirklar med diametern 2 cm. Hur stor area har figuren som blir kvar?